Több témakört érintő vagy nehezebb feladatok

1. Mekkorák annak a derékszögű háromszögnek a szögei, amelynek súlypontja illeszkedik a háromszög beírt körére?

2. Egy derékszögű háromszög beírt köre az átfogóhoz tartozó súlyvonalat olyan három szakaszra bontja, melyek közül kettő hossza egyenlő. Számítsa ki a háromszög hegyesszögeit!

3. Koordinátaföld lakói (akik a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben élnek) új ivóvízkutat csináltatnak. Megegyeznek, hogy a kút az ország *x*-tengelyén kap helyet. Az ország két lakója, Verse Nyikolaj, aki a (2; 10)-ben lakik, valamint Küz Döme, a (14; −5) lakója folyton mindenben versengenek, így nem meglepő módon a kúttól való távolságukban is. Maximum hány koordinátaegységnyivel (amely az ország hivatalos mértékegysége) lehet közelebb a kút Döméhez, mint Nyikolajhoz?

4. Egy konvex négyszög átlói merőlegesek egymásra. Bocsásson az átlók metszéspontjából merőlegeseket a négyszög oldalaira. Bizonyítsa be, hogy ezen merőlegesek talppontjai húrnégyszöget határoznak meg!

5. Egy sorozat első *n* eleme $a_1=\sqrt{2}$; $a_2=\sqrt{2\sqrt{2}}$; $a_3=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; ... ; $a_n=\sqrt{2\cdot a_{n-1}}$

   a) Fejezze ki a_n-t *n* függvényeként!

   b) Legalább hány elemet kell összeszorozni az első elemtől kezdve, hogy a szorzat értéke 5.000.000-nál nagyobb legyen?

6. Az *ABCD* tetraéderbe írjunk egy érintőgömböt. Mutassuk meg, hogy

   (1) $\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_C}+\frac{1}{m_D}=\frac{1}{r}$ és

   (2) $m_A+m_B+m_C+m_D\ge 16\cdot r$,

ahol $m_A;m_B;m_C;m_D$ a tetraéder megfelelő csúcsaiból induló magasságai és *r* a beírt gömb sugara!

7. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

   $$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$$

8. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

   $$\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7+-6\sqrt{x-2}}=5.$$

9. A *p* valós paraméter mely értékeire van pontosan egy gyöke az alábbi egyenletnek?

   $$x\left|x+2p\right|+1-p=0$$

10. A *p* valós szám értékétől függően hány gyöke van $\sqrt{2\left|x\right|-x^2}=p$ egyenletnek?

11. Oldja meg a valós számok halmazán az $\log_{|x-1|}x\ge 1$ egyenlőtlenséget!

12. Legyen *x* > 0; *y* > 0 és *x* + *y* = 1. Igazolja, hogy $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\ge 9$!

13. Igazolja, hogy ha $n > 1$ természetes szám, akkor $\frac{9}{16} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} < 1$!

14. Hányféleképpen lehet egy 7 fokból álló létra tetejére feljutni, ha egyszerre vagy egy, vagy két fokot léphetünk?

15. Egy táblára felírjuk 1-gyel kezdve az egymás utáni pozitív egész számokat egy bizonyos számig. Majd a felírt számok közül egyet letörlünk. A megmaradt számok számtani közepe $\frac{602}{17}$. Melyik számot töröltük le?

16. Az asztalon öt erszény van, mindegyikükben valamennyi tallér. Tegyük át az első erszény tartalmának ötödrészét a másodikba, azután a második erszény (új) tartalmának ötödrészét a harmadikba, és így tovább, végül az ötödik erszény (új) tartalmának ötödrészét az első erszénybe. Azt láthatjuk, hogy most mindegyik erszényben egyformán T tallér van. Hány tallér volt eredetileg az egyes erszényekben?

17. Oldja meg a következő egyenletet, ha tudja, hogy p prímszám és n pozitív egész szám!

$$1 + p + p^2 + p^3 + \ldots + p^n = 2801.$$

18. Az m paraméter mely egész értékénél lesz a $9^x + 2(m+3)\cdot 3^x + m^2 = 22$ egyenletnek két különböző gyöke a valós számok halmazán? Adja meg a lehetséges gyökök számértékét is!

19. Mennyi az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x \mapsto |x^2+x| + |x^2-3x+2|$ függvény legkisebb és legnagyobb értéke a $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ intervallumban?

20. Az $ABCD$ húrnégyszögben $BAD\sphericalangle = 135^\circ$. Az AC és BD egymásra merőleges átlók metszéspontja M. Bizonyítsa be, hogy ekkor $BD + MA = MC$!

21. Egy centiméterben mérve egész szám élhosszúságú kockát feldaraboltunk 99 kisebb kockára úgy, hogy közülük 98 darab egybevágó, 1 cm élű kocka. Számítsa ki az eredeti kocka térfogatát!

22. Apátsági Kasmír von Celldömölknek a Facebookon 40 ismerőse van (minden ismeretséget kölcsönösnek tekintünk). Kasmír ismerőseinek mindegyike Kasmír többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer.
    a) A szóba került 41 élőlény között összesen hány ismeretség áll fenn?
    b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Kasmír 40 ismerőse közül véletlenszerűen választva kettőt, ők ismerik egymást?
    c) Válasszunk most a 41 személy közül véletlenszerűen kettőt! Mennyi a valószínűsége, hogy nem ismerik egymást?

23. Egy pozitív számokból álló mértani sorozat első n tagjának összege S, az első n tag reciprokainak összege R. Fejezze ki az első n tag szorzatát S-sel, R-rel és n-nel!

24. Adja meg azokat az a; b; c számjegyeket, amelyekre fennáll, hogy az egyjegyű $\overline{a}$, a kétjegyű $\overline{ba}$ és a háromjegyű $\overline{cba}$ szám egy mértani sorozat három egymást követő tagja!

25. Mi az utolsó, 0-tól különböző jegye az első száz pozitív egész szám szorzatának?

26. Bizonyítsuk be, hogy a k kerületű háromszögek közül a szabályos háromszög területe a legnagyobb, $t = \frac{k^2\sqrt{3}}{36}$!