# Teljes indukció

1. Bizonyítsuk be, hogy ha *n* pozitív egész, akkor

(1) $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

(2) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(3) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

(4) $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

(5) $1^5+2^5+3^5+\ldots+n^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$;

(6) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

(7) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$;

(8) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;

(9) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

(10) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n(n+4)}{9(n+1)(n+2)(n+3)}$;

(11) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

(12) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

(13) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+\ldots+n(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$;

(14) $1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;

(15) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$;

(16) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$;

(17) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$;

(18) $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

(19) $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$;

(20) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$;

(21) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\ldots\left(2^{2^n}+1\right)=2^{2^{n+1}}-1$;

(22) $(1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$;

(23) $(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$;

(24) $8\mid 3^{2n}+7$;

(25) $16\mid 9^{n+1}-8n-9$;

(26) $9\mid 5^{2n}+3n-1$;

(27) $9\mid 7^n+3n-1$;

(28) $27\mid 10^n+18n-1$;

(29) $2304\mid 7^{2n}-48n-1$;

(30) $5\mid 2^{4n+1}+3$;

(31) $64\mid 3^{2n+2}-8n-9$;

(32) $99\mid 3^{n+3}\cdot2^{2n+2}-108$;

(33) $5\mid 4\cdot6^n+5^n-4$;

(34) $24\mid 2\cdot7^n+3\cdot5^n-5$;

(35) $8\mid 5^n+2\cdot3^{n-1}+1$;

(36) $17\mid 3\cdot5^{2n+1}+2^{3n+1}$;

(37) $33\mid 46^n-13^n$;

(38) $57\mid 7^{n+2}+7^{n+1}+7^n$;

(39) $57\mid 7^{n+2}+8^{2n+1}$;

(40) $7\mid 3^{2n+1}+2^{n+2}$;

(41) $21\mid 5^{2n+1}+4^{n+2}$;

(42) $13\mid 4^{2n+1}+3^{n+2}$;

(43) $11\mid 3^{2n+2}+2^{6n+1}$;

(44) $72\mid n\cdot13^{n+1}-(n+1)13^n+1$;

(45) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$;

(46) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n\text{ darab gyökjel}}=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$;

(47) $a\in\left]-1;\infty\right[$ esetén $(1+a)^n\geq1+na$ (Bernoulli-egyenlőtlenség);

(48) $n\geq5$ esetén $2^n>n^2$;

(49) $n\geq10$ esetén $2^n>n^3$;

(50) $n\geq7$ esetén $3^n<n!$;

(51) $n\geq4$ esetén $3^n>n^3$;

(52) $n\geq2$ esetén $n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$;

(53) $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n+2)}\geq\dfrac{1}{2n+2}$;

(54) $n \geq 2$ esetén $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{4}-\frac{1}{n}$;

(55) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+1}{2n+2} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$;

(56) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2^n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

(57) $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 < \frac{1}{3n+1}$;

(58) $\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\left(1+\frac{1}{4^3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \leq 3-\frac{1}{n}$;

(59) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \sqrt{n}$;

(60) $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

(61) $2\sqrt{n+1}-2 < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-1$;

(62) $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

(63) $\frac{n}{2} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} < n$;

(64) $n \geq 4$ esetén $3^n > 2^n + 7n$.

2. Igazolja, hogy a 1003; 10013; 100113; 1001113; 10011113; … sorozat tagjai oszthatók 17-tel!

3. Legyen $a$ olyan valós szám, amelyre $a+\frac{1}{a}$ egész. Bizonyítsa be, hogy ekkor $a^n+\frac{1}{a^n}$ is egész ($n$ pozitív egész)!

4. Tudjuk, hogy $a$ és $b$ két olyan valós szám, amelyekre $a+b=2$ és $a^2+b^2=4$. Bizonyítsa be, hogy ha $n > 2$ egész, akkor $a^n+b^n=2^n$ !

5. Az $x^2+ax+b=0$ másodfokú egyenlet együtthatói egész számok. Igazoljuk, hogy ha $x_1$ és $x_2$ az egyenlet megoldásai, akkor tetszőleges pozitív egész $n$ esetén $x_1^n+x_2^n$ egész szám!

6. Adott $n$ darab egyenes úgy, hogy bármely kettőnek van közös pontja. Bizonyítsa be, hogy akkor az egyenesek vagy mindannyian egy síkban vannak, vagy mindannyian egy ponton haladnak át!

7. Adott $n$ darab pont a síkon ($n > 2$). A közöttük meghúzható szakaszok közül $n$ darabot berajzolunk. Mutassa meg, hogy ekkor létrejön olyan zárt sokszögvonal, amelynek csúcsai az adott pontok közül valók!

8. Bizonyítsuk be, hogy akárhogy húzunk be néhány egyenest egy füzetlapra, a kapott rajz kiszínezhető két színnel úgy, hogy azonos színű mezők csak csúcsokban érintkezhetnek egymással!

9. Adott $n$ darab tetszőleges négyzet. Bizonyítsuk be, hogy ezeket fel lehet darabolni úgy, hogy a darabokból egy újabb négyzetet lehet összerakni!

10. Bizonyítsuk be, hogy $n$ darab egy síkban lévő egyenes a síkot legfeljebb $\frac{n^2+n+2}{2}$ részre bontja.

11. Bizonyítsuk be, hogy $n$ darab sík a teret legfeljebb $\frac{n^3+5n+6}{6}$ részre osztja.

12. Bizonyítsuk be, hogy $n$ darab egy síkban lévő kör a síkot legfeljebb $n^2-n+2$ részre bontja.

13. Egy tábla csokoládé $n$ darab kis négyzetből áll, amelyek szögletes módon vannak elrendezve. A táblát kis kockákra tördeljük, mindig a vonalak mentén egyenesen törve. Mennyi a legkevesebb számú törés ($n$ függvényében)?

14. A következő játékot játsszuk: Van egy kupacban $n$ darab egyeurós pénzérménk. Első lépésben ebből két kisebb kupacot csinálunk: $k$ és $n - k$ darab egyeuróssal. Ezért $k\cdot(n - k)$ eurót kapunk jutalomként. Ezután minden lépésben valamelyik meglévő $m > 1$ elemű kupacot két kisebb részre osztunk: $j$ és $m - j$ darab egyeuróssal. Ezért $j\cdot(m - j)$ eurót kapunk jutalomként. Ha már minden kupac egyetlen egyeurósból áll, a játéknak vége. Mi a nyerő stratégia, ha maximális jutalomra törekszünk? Mennyi a jutalmunk, ha kezdetben 2017 darab egyeurós volt a kupacban?

15. Igazoljuk, hogy bármely szabályos háromszög felbontható $n$ darab szabályos háromszögre, ahol $n \geq 6$ természetes szám!

16. *Hol a hiba a következő teljes indukciós bizonyításban?*
    *Állítás:* Minden ló azonos színű.
    *Bizonyítás:* A lovak száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.
    *1.* Ha csak egyetlen ló van, annak egyetlen a színe.
    *2.* Tegyük fel, hogy akárhogyan is választunk ki $n$ db lovat, azok azonos színűek.
    *3.* Belátjuk, hogy ha veszünk $n + 1$ lovat, azok is azonos színűek lesznek. Számozzuk meg a lovakat: 1; 2; … ; $n$; $n + 1$. Vegyük az {1; 2; … ; n} és a {2; … ; $n$; $n + 1$} halmazokat. Mindkettő $n$ elemű, tehát bennük a lovak azonos színűek. Mivel a két halmazban van átfedés, ez a szín ugyanaz.