Diofantoszi egyenletek

A matematikában a *diofantoszi egyenlet* vagy *diofantikus egyenlet* olyan egész együtthatós, általában többismeretlenes algebrai egyenlet, amelynek megoldásait az egész, ritkábban a természetes vagy a prímszámok, illetve a racionális számok körében keressük. Az i. sz. 3. században élt görög matematikusról, Diophantoszról kapta nevét.

A diofantoszi egyenletek megoldásainak keresésében sokszor segítenek a következő kérdések:

- Megoldható az adott egyenlet?
- Vannak-e még más megoldások is az ismerteken kívül?
- Véges, vagy végtelen megoldás van-e?
- Tényleg létezik-e minden, elméletben létező megoldás?
- Kiszámítható-e az összes megoldás?

A legnevezetesebb problémák:

- Oldjuk meg az egész számok halmazán az $ax+by=c$ egyenletet, ahol *a*, *b* és *c* egész számok (**lineáris diofantoszi egyenlet**)!
- Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az $x^2+y^2=z^2$ egyenletet (**pitagoraszi számhármasok**)!
- **Nagy Fermat-tétel** (sejtésként megfogalmazva **1637**-ben, bizonyítva **1995**-ben, *a bizonyítás olyan összetett, hogy a számelméleti matematikusok közül is csak néhányan képesek megérteni*): Az $x^n+y^n=z^n$ egyenletnek nincsenek pozitív egész gyökei, ha $n > 2$, egész.

Feladatok

1. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $6x-7y=2017$ egyenletet!
2. Mely egész *n*-ekre lesz egész a $\dfrac{2n+6}{n-3}$ kifejezés?
3. Van-e olyan *x*, *y* pozitív egész szám, amelyekre $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x+y}$?
4. Van-e olyan *p* prímszám, amelyre p^2+2^p is prím?
5. Van-e olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalhosszai egész számok, és kerülete 88 egység?
6. Három prímszám szorzata összegük ötszöröse. Melyek ezek a prímszámok?
7. Hányféleképpen lehet 10 és 50 filléres pénzdarabok egymás mellé rakásával (az összes középpont egy egyenesen) egy pontosan 1 méter hosszú szakaszt letakarni, ha legalább 50 pénzdarabot használunk fel, és a kétféle pénzdarab sorrendjét tekintetbe vesszük? (Az egyértékű pénzdarabokat nem különböztetjük meg, a 10 filléres átmérője 19 mm, az 50 fillérésé 22 mm.)
8. Lássuk be, hogy 99 szomszédos egész szám négyzetének az összege nem lehet teljes hatvány!

9. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2.$$

10. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x+y+z=3$$
$$x^3+y^3+z^3=3$$

11. Oldjuk meg a pozitív egészek körében az alábbi egyenletet:

$$[x;y]+(x;y)+x+y=xy.$$

12. Van-e két olyan pozitív egész szám, amelyek legkisebb közös többszöröse megegyezik négyzetük számtani közepével?

13. Keressünk 11 egymás utáni természetes számot, melyek négyzetösszege négyzetszám!

14. Lehet-e négy egymást követő páratlan egész szám szorzata négyzetszám? Ha igen, akkor mely esetekben?

15. Oldjuk meg az egész számok körében az $x^2+y^2=2017$ egyenletet!

16. Hány megoldása van az $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{2017}$ egyenletnek a pozitív egész számok halmazán?

17. Határozzuk meg az egymástól különböző a és b számjegyeket úgy, hogy az $\overline{ab}$ és $\overline{ba}$ számok reciprokainak különbsége $\frac{1}{270}$ legyen!